Topología II
Examen IV

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología II
Examen IV

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2025

Asignatura Topología II.

Curso Académico 2024/25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Grupo Único.

Descripción Control del Tema 2.

Fecha 12 de diciembre de 2024.

Ejercicio 1. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Existe una aplicación recubridora $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{RP}^2$.

b) Existe una aplicacición recubridora $p : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Ejercicio 2. Prueba uno de los dos siguientes resultados:

a) Sean $p : R \to B$ una aplicación recubridora y $p(r_0) = b_0$. Demuestra que $H_0 = p_*(\pi_1(R, r_0))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(B, b_0)$ si, y solo si, para cada dos puntos $r_1, r_2 \in p^{-1}(\{b_0\})$ existe un isomorfismo de recubridores $\varphi : (R, p) \to (R, p)$ tal que $\varphi(r_1) = r_2$.

b) Demuestra que toda aplicación continua $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{S}^1$ es homotópicamente nula (es decir, f es homotópica a una aplicación constante).

Solución.

Ejercicio 1. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Existe una aplicación recubridora $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{RP}^2$.

Es falsa: por reducción al absurdo, supongamos que existe una aplicación recubridora $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{RP}^2$. Sabemos que $\mathbb{S}^2$ es el recubridor universal de $\mathbb{RP}^2$, gracias a la aplicación que proyecta en el cociente. Como $\mathbb{R}^2$ también recubre a $\mathbb{RP}^2$ y también es simplemente conexo tenemos entonces que debe existir un homeomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{S}^2$. Sin embargo, esto es una contradicción, ya que $\mathbb{S}^2$ es compacto y $\mathbb{R}^2$ no.

b) Existe una aplicacición recubridora $p : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Es falsa: por reducción al absurdo, supongamos la existencia de una aplicación recubridora $p : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, como $\mathbb{R}^2$ es el recubridor universal de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ y $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ es simplemente conexo (como producto de simplemente conexos) tenemos entonces que ha de existir un homeomorfismo entre $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, lo que lleva a una contradicción:

Sea $p \in \mathbb{S}^2$, tenemos que $(\mathbb{S}^2 \setminus \{p\}) \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$. Si fuese $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$ tenemos entonces que hay un subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$ que es homeomorfo a $\mathbb{R}^3$, de donde todo abierto de $\mathbb{R}^3$ sería homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^2$, y vimos en la relación 1 que esto es falso.

Ejercicio 2. Prueba uno de los dos siguientes resultados:

a) Sean $p : R \to B$ una aplicación recubridora y $p(r_0) = b_0$. Demuestra que $H_0 = p_*(\pi_1(R, r_0))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(B, b_0)$ si, y solo si, para cada dos puntos $r_1, r_2 \in p^{-1}(\{b_0\})$ existe un isomorfismo de recubridores $\varphi : (R, p) \to (R, p)$ tal que $\varphi(r_1) = r_2$.

Por doble implicación:

$\Longrightarrow$) Dados $r_1, r_2 \in p^{-1}(\{b_0\})$, por ser R arcoconexo tenemos que existen arcos $\alpha_1, \alpha_2 : [0, 1] \to R$ de forma que:

$$\alpha_1(0) = r_0 = \alpha_2(0), \qquad \alpha_1(1) = r_1, \qquad \alpha_2(1) = r_2$$

En dicho caso, hemos visto en una Proposición de teoría que entonces:

$$p_*(\pi_1(R, r_1)) = [p \circ \alpha_1]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_0)) * [p \circ \alpha_1]$$
$$p_*(\pi_1(R, r_2)) = [p \circ \alpha_2]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_0)) * [p \circ \alpha_2]$$

Pero $[p \circ \alpha_1], [p \circ \alpha_2] \in \pi_1(B, b_0)$ y $H_0 = p_*(\pi_1(R, r_0))$ es normal en $\pi_1(B, b_0)$, por lo que tenemos:

$$p_*(\pi_1(R, r_1)) = H_0 = p_*(\pi_1(R, r_2))$$

y en teoría hemos visto que bajo estas condiciones existe entonces un isomorfismo de recubridores $\varphi : (R, p) \to (R, p)$ de forma que $\varphi(r_1) = r_2$.

$\Longleftarrow$) Sea $g \in \pi_1(B, b_0)$, vimos en una Proposición de teoría que para el subgrupo gH_0g^{-1} conjugado de $H_0 = p_*(\pi_1(R, r_0))$ debía existir $r_1 \in R$ de forma que $p_*(\pi_1(R, r_1)) = gH_0g^{-1}$. Ahora, para r_0 y r_1 tenemos que existe un isomorfismo de recubridores $\varphi : (R, p) \to (R, p)$ con $\varphi(r_0) = r_1$, de donde debemos tener:

$$gH_0g^{-1} = p_*(\pi_1(R, r_1)) = p_*(\pi_1(R, r_0)) = H_0$$

La arbitrariedad de g nos permite concluir que $H_0 \lhd \pi_1(B, b_0)$.

b) Demuestra que toda aplicación continua $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{S}^1$ es homotópicamente nula (es decir, f es homotópica a una aplicación constante).

Sea $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{S}^1$ una aplicación continua, si consideramos el recubridor $(\mathbb{R}, p)$ de $\mathbb{S}^1$ donde p es la aplicación recubridora estándar, estamos en la situación:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{RP}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

Fijado $x_0 \in \mathbb{RP}^2$, si consideramos $b_0 = f(x_0)$ observemos que siempre tenemos que $f_*(\pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0))$ es un subgrupo de $\pi_1(\mathbb{S}^1, b_0)$. En este caso tenemos que $\pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \cong \mathbb{Z}$ y que $\pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0) \cong \mathbb{Z}_2$ que es un grupo finito, por lo que su imagen por f_* seguirá siendo un grupo finito, luego tiene que ser:

$$f_*(\pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0)) = \{[\varepsilon_{b_0}]\}$$

Por tanto, podemos levantar la aplicación f, ya que fijado $r_0 \in p^{-1}(\{b_0\})$ tenemos:

$$f_*(\pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{R}, r_0))$$

tenemos entonces que existe $\hat{f} : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}$ levantamiento de f con $\hat{f}(x_0) = r_0$. Como $\hat{f}$ llega a $\mathbb{R}$ (que es contráctil) tenemos que $\hat{f}$ es homotópicamente nula, es decir, existe $z_0 \in \mathbb{R}$ y una homotopía $H : \mathbb{RP}^2 \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ de forma que:

$$H(x, 0) = \hat{f}(x), \qquad H(x, 1) = z_0 \qquad \forall x \in \mathbb{RP}^2$$

Si consideramos ahora la homotopía $p \circ H : \mathbb{RP}^2 \times [0, 1] \to \mathbb{S}^1$ tenemos que:

$$(p \circ H)(x, 0) = p(\hat{f}(x)) = f(x), \qquad (p \circ H)(x, 1) = p(z_0) \qquad \forall x \in \mathbb{RP}^2$$

Por lo que f es homotópica a la aplicación constantemente igual a $p(z_0)$, como queríamos probar.